

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

### LA CALCULATRICE EST AUTORISÉE

Consignes à suivre à chaque DS :

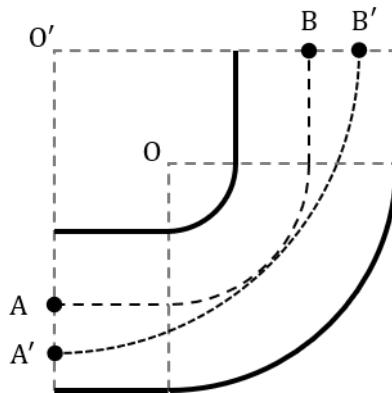
- Numéroter les pages. Numéroter les questions (inutile d'écrire les titres).
- Soigner la rédaction et la présentation : aérer la copie, encadrer ou souligner les résultats.
- Lire rapidement l'ensemble du sujet en début d'épreuve : les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Pour un exercice donné, traiter et rendre les questions dans l'ordre.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne sera pas prise en compte.

## I) Mouvement circulaire

Soit un point M en mouvement circulaire de rayon  $R$ .

- 1) Faire un schéma du mouvement. Dessiner les vecteurs de la base polaire associée au mouvement.
- 2) Ajouter au schéma précédent le vecteur vitesse  $\vec{v}$  et le vecteur accélération  $\vec{a}$ , dans l'hypothèse où la norme de  $\vec{v}$  augmente avec le temps.
- 3) Établir les expressions de  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  pour un mouvement uniforme de vitesse angulaire  $\omega$ .

On envisage deux trajectoires d'une voiture prenant un virage à vitesse constante.



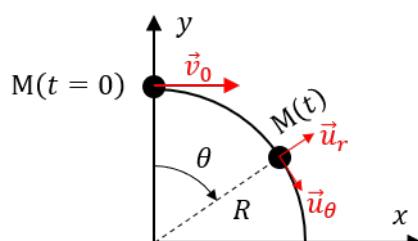
La première consiste à aborder le virage en A, à parcourir une portion rectiligne de longueur  $\ell = 10 \text{ m}$ , puis un quart de cercle de centre O, de rayon  $R = 75 \text{ m}$ , et enfin terminer sur une portion rectiligne pour arriver en B.

La deuxième consiste à aborder le virage en A' et suivre une trajectoire circulaire de centre O', de rayon  $R' = 90 \text{ m}$ , jusqu'au point B'.

- 4) Déterminer les longueurs de chacune des trajectoires.
- 5) Pour des raisons de sécurité, l'accélération subie dans le virage ne doit pas dépasser  $a_m = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Déterminer littéralement puis numériquement les vitesses maximales auxquelles le pilote pourra rouler sur chaque trajectoire.

## II) Glissade sur un igloo

On étudie le mouvement d'un enfant esquimaux, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$  qui glisse sans frottement sur un Igloo de rayon  $R$ . Il part avec une vitesse  $v_0$  depuis le sommet de l'igloo.



6) Appliquer le PFD sur l'enfant dans la base polaire. Identifier l'équation du mouvement. Quelle information l'autre équation contient-elle ?

Il n'est pas possible de résoudre l'équation du mouvement. En revanche, on peut tout de même s'en servir pour résoudre l'autre équation, portant sur la réaction normale de l'igloo.

7) Multiplier l'équation du mouvement par  $\dot{\theta}$ , puis intégrer entre l'instant initial et un instant  $t$  quelconque. Montrer que :

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g(1 - \cos(\theta))$$

8) En déduire l'expression de la norme de la force de réaction normale de l'igloo.

9) Déterminer l'angle  $\theta_c$  où l'enfant décolle de l'igloo. Conclure.

### III) Trajectoires des plombs d'une cartouche

Cette partie se propose d'étudier les trajectoires décrites par la gerbe de plomb d'une cartouche de chasse. Un fusil de chasse (arme à feu) ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut  $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche, supposée ponctuelle, et de masse  $m = 0,1 \text{ g}$ . On néglige la poussée d'Archimède. On note  $\vec{g}$  l'accélération de pesanteur de norme  $g$ . On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

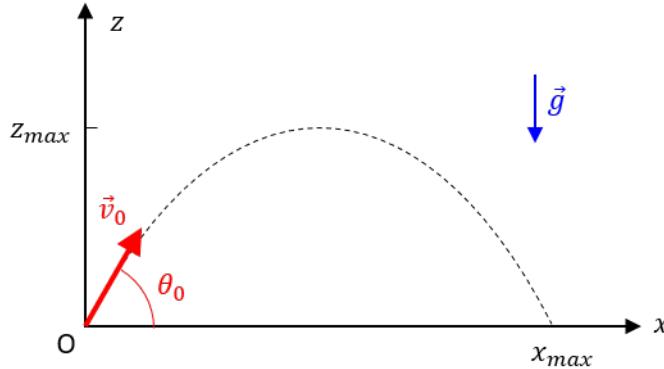


Figure n°1 : trajectoire gravitaire

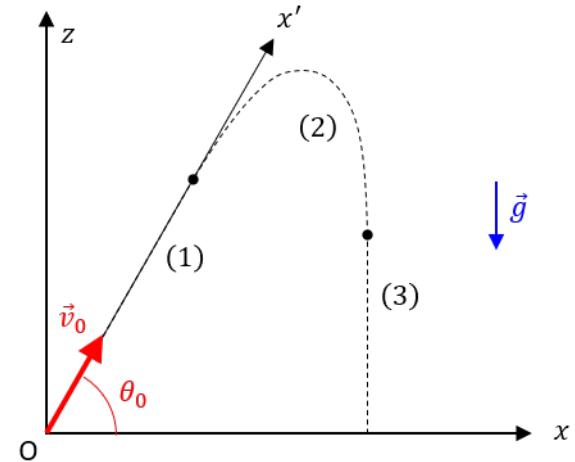


Figure n°2 : trajectoire de Tartaglia

#### III.1) Équation du mouvement

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit :

$$\vec{f} = -kv\vec{v}$$

où  $v$  est la norme du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du projectile.

10) Déterminer la dimension dans le système international du coefficient  $k$ .

11) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{v}$ .

12) Déterminer l'expression de la norme de la vitesse en régime permanent, notée  $v_\infty$ , en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $k$ .

#### III.2) Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air devant le poids de la cartouche. Se référer à la figure n°1 pour les notations.

13) Montrer que cela correspondrait à une vitesse initiale  $v_0$ , obéissant à l'inégalité :  $v_0 \ll v_\infty$ .

À l'instant initial, le projectile est placé au centre du repère (point O) et possède une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\theta_0$  avec l'axe horizontal.

14) Projeter l'équation du mouvement sur la base cartésienne.

15) Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.

- 16) Quelle est la nature de cette trajectoire dite « gravitaire » ?
- 17) Déterminer, en fonction de  $v_0$ ,  $g$  et  $\theta_0$ , la portée du tir  $x_{max}$  (abscisse atteinte par le projectile lorsqu'il touche le sol) ainsi que la hauteur maximale atteinte par le projectile  $z_{max}$  au cours du mouvement.

### **III.3) Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia**

Pour les plombs de chasse,  $v_0 \gg v_\infty$ . Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue 3 phases (cf. figure n°2) : une première phase (1) à mouvement rectiligne, une deuxième phase (2) à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase (3) de mouvement de chute verticale. Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balistique Niccolò Tartaglia (XVI<sup>e</sup> siècle), qui a décrit les trajectoires d'un boulet de canon.

#### **Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant**

Soit  $(Ox')$  la direction de la droite trajectoire dans cette phase initiale. On note  $x'$  l'abscisse du point M sur cette droite qui fait un angle  $\theta_0$  avec  $(Ox)$  et  $\vec{v}$  sa vitesse.

18) Montrer que le poids d'un plomb est alors négligeable devant la force de traînée.

19) Durant cette phase, quel est le lien entre  $v$  et  $x'$  ?

20) Montrer que l'équation du mouvement dans la première phase se met sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dx'} + \frac{\vec{v}}{D} = \vec{0}$$

et exprimer  $D$  en fonction de  $g$  et  $v_\infty$ .

21) Résoudre entièrement cette équation différentielle. Que représente le paramètre  $D$  ?

### **III.4) Deuxième phase : la phase intermédiaire**

Dans cette phase, la vitesse a diminué.

22) Quelle est la nature de la trajectoire ?

### **III.5) Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant**

On note que cette phase est quasiment verticale.

23) Montrer que la vitesse atteint une vitesse limite dont on donnera l'expression. Expliquer le terme de « mur aérodynamique » utilisé pour qualifier cette dernière phase.